



TITLE:

ソルトフィンガーの非定常流れ(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

石井, 克哉; 楠本, 淑郎

CITATION:

石井, 克哉 ...[et al]. ソルトフィンガーの非定常流れ(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 477: 126-144

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103334>

RIGHT:

ソルトフィンガーの非定常流れ

東大・理 石井克哉
楠本淑郎

(Ishii Katsuya, Kusumoto Yoshiro)

§1. はじめに

流体中に、温度・塩分等異なる拡散係数を持ち流体の密度分布に影響を与える二つの要素がある場合、二重拡散対流と呼ばれる興味ある多くの現象を引き起す。上方において高温で塩分が濃いような温度-塩分勾配をもつ流体中で見い出されるソルトフィンガー(細長いコラム状の対流セル)もその一例である。実験および観測において、こうしたフィンガーは乱れた部分を挟んで上下に幾層かが重なった形をもつと報告されている (Tait & Howe (1968), Stern & Turner (1969))。ソルトフィンガーの安定性及び鉛直方向への層形成の可能性については昨年の数理解(ナビエ・ストークス方程式の解)研究会(1981.12)で発表した。今回はその研究に基づいて層の構造の種々の可能性について数値計算の結果を使って考える。基礎とする方程式は拡散項をもつ非線形連立偏

微分方程式であり、同種の方程式は近年捕食問題においても研究されている。

§2. 層のモデル方程式

静止流体中で正の一定の勾配 (\bar{T}_z , \bar{S}_z) をもつ温度 ($\bar{T}_z z$)、塩分 ($\bar{S}_z z$) 場を考える。この時、流体密度 ρ^* は

$$\rho^* = \rho_0 \{1 - (\alpha^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z) z\}$$

(ρ_0 は $z=0$ での密度、 α^*, β^* はそれぞれ温度、塩分の密度変化率) と表せ、 $\alpha^* \bar{T}_z > \beta^* \bar{S}_z$ であれば静的に安定な状態となる。これを Basic state とし、それからのズレ—速度 u (u, v, w)、圧力 (p)、温度 (T)、塩分濃度 (S) を支配する基礎方程式を Boussinesq 近似を用いて求めると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \frac{D u}{D t} - \nabla^2 u &= -\frac{1}{\sigma} \nabla p + (Ra T - Rs S) \hat{z} \\ \frac{DT}{Dt} - \nabla^2 T + w &= 0 \\ \frac{DS}{Dt} - \lambda \nabla^2 S + w &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

となる。ここで \hat{z} は鉛直上向きの単位ベクトルであり、Brunt Väisälä frequency $N = \{g(\alpha^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z)\}^{1/2}$ と熱伝導率 κ_T に基づく無次元化を行った。無次元化パラメータは

$$\begin{aligned} \text{プラントル数 } \sigma &= \nu / \kappa_T, \quad \text{拡散比 } \lambda = \kappa_s / \kappa_T < 1 \\ \text{レーリー数 } Ra &= \frac{\alpha^* \bar{T}_z}{\sigma(\alpha^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

塩分レーリー数 $R_s = \frac{\beta^* \bar{S}_z}{\sigma (4^* \bar{T}_z - \beta^* \bar{S}_z)}$

である。通常の場合、適当な長さ d を導入してレーリー数、

塩分レーリー数を

$$R_a = \frac{g \bar{T}_z d^4}{\nu \kappa}, \quad R_s = \frac{g \bar{S}_z d^4}{\nu \kappa_T} \quad (2.2a)$$

と定義し、 R_s, R_a は独立であるが、Brunt Väisälä frequency を使用したため R_a, R_s は \bar{T}_z / \bar{S}_z のみの関数となり

$$R_a = R_s + \frac{1}{\sigma} \quad (2.3)$$

の関係式を満たす。

ソルトフィンガーに対応する解として Stern (1969) が導いた (2.1) の厳密解は、ソレノイダルな速度場を

$$(u, v, w) = (\phi_{xz}, \phi_{yz}, -\nabla_H^2 \phi) \quad (2.4)$$

$$\nabla_H^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

と書き、

$$\phi = A(t) \sin lx \sin ly \quad (2.5)$$

とおくことによ、て得られる。フィンガーの水平断面は多くの観察に従、て正方形とした。フィンガーが成長するための条件は (2.4, 5) を (2.1) に代入することにより

$$R_a < R_s / \lambda - 4 l^4 \quad (\equiv R_c) \quad (2.6)$$

と求められる。

σ, λ などのように物質定数により決定される量を定数とみなすと、式 (2.3)、(2.5) より R_s, l の二つの量を指定

すればフィッシャーの場が決定できる。しかし、以下の式の導出をここでの無次元化の特殊性に依存しない形で行うため、 R_a, R_s を独立に変化する量として、supercriticality δ ($0 < \delta \ll 1$) を

$$R_a = R_c (1 - \delta) \quad (2.7)$$

と導入する。^{*}

系がわずかに超臨界状態にある場合、振幅 A の鉛直方向 R が時間に対する依存性は $\delta^{1/2}$ あるいは δ に比例するゆえ、くりとした大きなスケールに渡るものとなる。こうした変化を

^{*} $R_s = R_a - \frac{1}{\sigma}$ の関係がある場合、 R_c に対応する臨界状態の意味は明かでない。この関係(2.3)を用いて大きさを l のフィッシャーの安定条件(2.6)を書き直すと

$$R_a > \frac{1 + 4l^4 \lambda \sigma}{\sigma(1 - \lambda)} \quad (\equiv R'_c) \quad (2.6a)$$

となる。この R'_c を使って

$$R_a = R'_c (1 + \delta'), \quad R_s = R'_c + \frac{1}{\sigma} + R'_c \delta' \equiv R'_{sc} + R'_c \delta'$$

と supercriticality δ' を導入した方がここでの無次元化においては自然である。しかし、以下の計算を (δ', R'_c) に基づいて行うことは $\delta = (\frac{1}{\lambda} - 1) \delta'$ のように(2.7)の supercriticality を変更し、結果の中で $R_s = R'_{sc}$ と見直したものに等しいことが容易にわかる。

と与えるため、新しい変数 τ, ζ を

$$\tau = \delta t, \quad \zeta = \delta^{1/2} z \quad (2.8)$$

のように定める。式(2.1) の (t, z) を (τ, ζ) によ、て書き直し、 (u, v, w) に(2.3)を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \phi_{x\zeta} &= -\delta^{-1/2} \frac{R_z}{\sigma} - \delta \tilde{\mathcal{L}}_1 \phi_{x\zeta} - \frac{\delta^{1/2}}{\sigma} \tilde{N} \phi_{x\zeta} \\ \mathcal{L}_0 \phi_{y\zeta} &= -\delta^{-1/2} \frac{R_y}{\sigma} - \delta \tilde{\mathcal{L}}_1 \phi_{y\zeta} - \frac{\delta^{1/2}}{\sigma} \tilde{N} \phi_{y\zeta} \\ -\mathcal{L}_0 \nabla_H^2 \phi &= -\delta^{1/2} \frac{P_z}{\sigma} + \delta \tilde{\mathcal{L}}_1 \nabla_H^2 \phi + \frac{\delta^{1/2}}{\sigma} \tilde{N} \nabla_H^2 \phi + R_c T - R_s S - \delta R_c T \\ \mathcal{L}_0 T - \nabla_H^2 \phi &= -\delta^{1/2} \tilde{N} T - \delta \tilde{\mathcal{L}}_2 T \\ \lambda \mathcal{L}_0 S - \nabla_H^2 \phi &= -\delta^{1/2} \tilde{N} S - \delta \tilde{\mathcal{L}}_3 S \end{aligned} \quad (2.9)$$

但し、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -\nabla_H^2, \quad \tilde{\mathcal{L}}_1 = \frac{1}{\sigma} \partial_\tau - \partial_{\zeta\zeta}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_2 = \partial_\tau - \partial_{\zeta\zeta}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_3 = \partial_\tau - \lambda \partial_{\zeta\zeta} \\ \tilde{N} &= \phi_{x\zeta} \partial_x + \phi_{y\zeta} \partial_y - \nabla_H^2 \phi \partial_\zeta \end{aligned}$$

である。物理量 ϕ, p, T, S も $\delta^{1/2}$ のべき級数で展開し、 $\delta^{1/2}$ の各べきに対する方程式を求めて解くと、 $O(\delta^{1/2})$ の式より、

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = A(\tau, \zeta) \sin lx \sin ly \\ T^{(1)} = -\phi^{(1)} + g(\tau, \zeta) \\ S^{(1)} = -\phi^{(1)} + h(\tau, \zeta) \end{cases} \quad (2.10)$$

etc.

の形の(2.5)に対応する解を得る。 A, g, h の τ, ζ 依存性は $O(\delta^{3/2})$ の方程式の solvability condition より

$$\begin{cases} (\partial_z - \alpha \partial_{zz} - \beta + \beta g_z - \gamma h_z) A = 0 \\ (\partial_z - \partial_{zz}) g = \frac{\ell^2}{2} (A^2)_z \\ (\partial_z - \lambda \partial_{zz}) h = \frac{\ell^2}{2} (A^2)_z \end{cases} \quad (2.11)$$

となる。ただし、 α, β, γ は正の定数で

$$\alpha = 12\ell^4/D, \quad \beta = 2\ell^2 R_c/D, \quad \gamma = 2\ell^2 R_s/\lambda D$$

$$D = R_s/\lambda^2 - R_c + 4\ell^4/\sigma \quad (2.12)$$

である。この結果に、条件(2.3)を使い $\delta \ll 1$ であることから $R_c = R_s + \frac{1}{\sigma}$ とすれば、(2.11)はパラメータ R_s だけで特徴づけられる。(註釈 δ から δ' への変更を行うと(2.11)の第一式の βA の項のみが $\frac{1-\lambda}{\lambda} \beta A$ に変わる。)

また、最初にした Stern の解は $\partial_z = 0$ とした時の $(A, g, h) = (e^{\beta z}, 0, 0)$ であることがわかる。

§ 3. モデル方程式の解

層構造を考える際、空間的周期解が特に興味を引くものとなる。この節では定常解と同時に、二つの空間的周期解になる可能性のある局所解について数値計算の結果を先取りする形で述べる。

① 定常解

式(2.11)の定常解は楕円函数により、

$$A^{(s)} = \left\{ \frac{4\beta}{l^2 \Gamma_2} \frac{k^2 K(k)}{2E(k) - (1-k^2)K(k)} \right\}^{1/2} \operatorname{sn} \left[\left\{ \frac{\beta}{4} \frac{K}{2E - (1-k^2)K} \right\}^{1/2} \zeta, k \right]$$

$$g^{(s)} = \lambda^2 h^{(s)} = \left\{ \frac{16\alpha\beta}{l^4 \Gamma_2^2} \frac{K}{2E - (1-k^2)K} \right\}^{1/2} \mathcal{Z} \left[\left\{ \frac{\beta}{4} \frac{K}{2E - (1-k^2)K} \right\}^{1/2} \zeta, k \right]$$

$$\left(\Gamma_2 = \frac{\sigma}{\lambda^2} - \beta \right) \quad (3.1)$$

と表わせる。ここで $K(k)$, $E(k)$ は第一種、第二種の完全楕円積分, $\mathcal{Z}(x, k)$ は Jacobi のゼータ函数である。母数 k は heat-salt Flux (F_T, F_S) の大きさを

$$F_T = \overline{wT} - T_S = -\frac{2\beta}{\Gamma_2} \frac{K-E}{2E - (1-k^2)K} = \lambda F_S \quad (3.2)$$

と決定し、 $0 \leq k < 1$ で F_T, F_S は 0 から無限大まで単調増加する。また、 k は A, g, h の最大値を決定するだけでなく波長も決定し、 $k=0$ で最小波長 $2\pi \sqrt{\frac{q}{\beta}}$ となる。つまり、

非常に短い周期の流れ場は定常的には存在できないことがわかる。図3.1にこの流れを模式的に示した。

定常解の安定性については前回の発表で詳しく述べたが、高調波擾乱に対しては常に安定であり、低波

数の擾乱に対しては多くのものについて不安定であった。

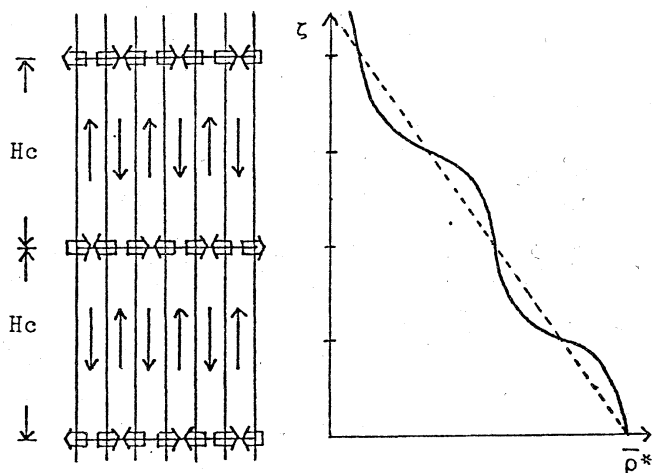


図3.1. Schematic sketch of flow configuration and of mean density profile. The dashed line indicates the unperturbed linear distribution.

② 矩形の解

Stern の解の拡張として $\partial_z A = \partial_{zz} g = \partial_{zz} h = 0$ である解を考えることができる。このとき (2.11) は

$$A_z - (\beta - \beta g_z + \sigma h_z) A = 0 \quad (3.3)$$

$$g_z = h_z = 0$$

となり、 $g_z = \text{const.}$ $h_z = \text{const.}$ で $\beta - \beta g_z + \sigma h_z$ の正負により A の絶対値は増大あるいは減少する。この形を局所解としてもち、半波長ごとに A, g, h の値の正負が逆転しているような周期解を考えることができる。これを模式的に示すと図 3.2 のようになる。

局所解を接続する狭い境界領域では A, h の拡散効果が強くなるだろうが、 $|A|$ の増加率が大きければ箱型は崩れないであろう。また $k \rightarrow 1$ の定常解はこの矩形解に類似した形をもつ。

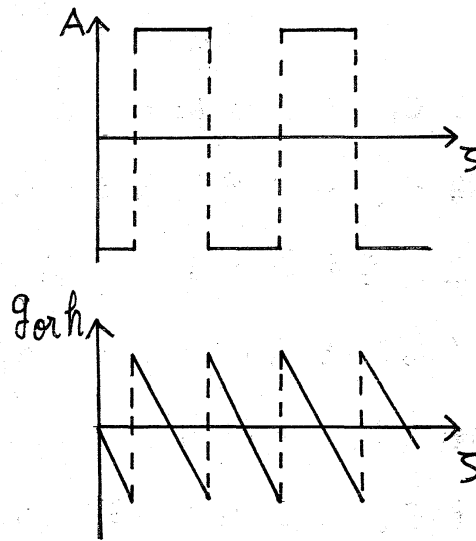


図 3. 2

③ 進行波解

熱塩対流では $\lambda \sim 0.01$ であるので、定常解でも示されるように g は h に比べ小さい役割しか果たさない。式 (2.11) で g を無視し、 A, h の拡散効果も小さい——つまり、 $\lambda \ll 1$

を仮定して、(2.11)を書き直すと

$$\begin{aligned} \partial_z A - \beta A - \sigma h_z A &= 0 \\ \partial_z h &= \frac{\ell^2}{2\lambda} (A^2)_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

が得られる。A, h の z に対する変化が十分なめらかならば (3.4) は (2.11) のよい近似となるであろう。式 (3.4) を A^2 に対する方程式に書き直し h を消去すれば

$$(\log A^2)_{zz} = \frac{\sigma \ell^2}{\lambda} (A^2)_{zz} \quad (3.5)$$

となる。進行波形の解を考えるため、新しい変数 $\xi = z + ct$ を導入し両辺を二回積分すると、解

$$\log A^2 - \frac{\sigma \ell^2}{\lambda c^2} A^2 = C_1 \xi + C_2 \quad (3.6)$$

(C_1, C_2 は積分定数)

を得る。この解は図 3.3 のように表わされ、z 全体つまり空間全体を覆うことはできない。また、解として上側の L_1 、下側の L_2 の二つの可能性をもつ。(2.11) の解との対応を考えると、 L_1, L_2 どちらの分枝をとる

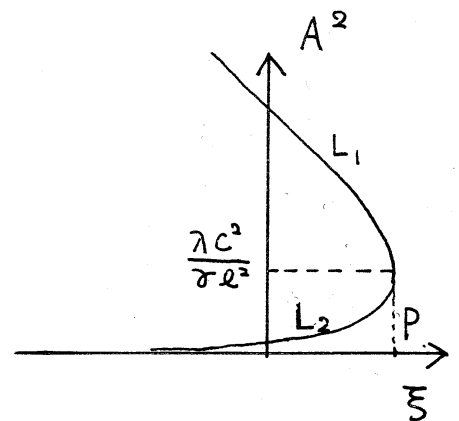


図 3.3

にしても解の延長ができなくなる点 P で shock を伴うことが予想される。shock の位置 P での A の大きさは

$A_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\sigma \ell^2}} |C|$ と速度に比例している。周期的に shock を置きその間を L_1 を使って結ぶと図 3.4 のようになる。

(3.4) の第2式の積分より

$$h_{\max} - h_{\min} = \frac{l^2}{2\lambda C} (A_{\max}^2 - A_0)$$

であり、 $h_{\min} \simeq -h_{\max}$ の時、

$$h_{\max} = \frac{l^2}{4\lambda C} (A_{\max}^2 - A_0) \quad (3.7)$$

の関係がある。

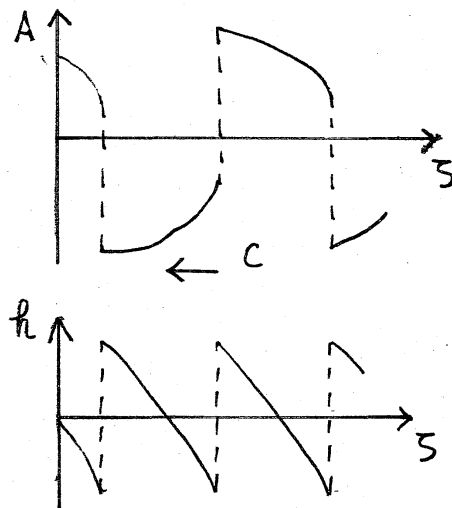


図 3.4

§4. 数値計算

式(2.11)を周期的境界条件の下で Crank-Nicholson の方法を用いて解いた結果を以下に示す。常温での熱・塩分の物質定数より $\lambda = 0.01$, $\sigma = 10$ とした。また、線形安定論では R_S が非常に小さな場合を除き同じような結果となるので $R_S = 10$ の場合のみを詳しく調べる。

各図の左側には A, h の空間変化を左下に示した時間ごとに重ねて書いてあり、右側には Fourier 成分の時間変化を示してある。Fourier 成分の波数は定常解の周期に対応するものを 1 としてある。また、Fourier 成分の図中の縦の破線は左側の図の各時刻を示し、位相の図は適当な波数のものの変化であるが、説明は略した。初期値は定常解に攪乱を加えたものを用い、攪乱の大きさは定常解の (I) 20% の攪乱、(II) 50

倍の攪乱の二種であり、他の条件と共に表4.1にまとめて記す。図4.1は倍波数の攪乱であるが急速に damp する様子がわかる。非常に大きい(50倍)攪乱の場合にも同様な damp を示し、線形安定論と一致する結果を得た。図4.2~5はいずれも $1/3$ 波数の攪乱を与えた場合であり、定常状態は不安定である。aの図はごく初期の状態を、bの図はAの変化がある程度落ち着いた時刻での様子を示す。 $\epsilon = 0.9$ の場合を示す図4.2と図4.3は最終的にAの成分が指数的に増大し、図3の②矩形の解に近いように思われる。時間変化を詳しくみると図4.2aで $1/3$ の Fourier 成分は指数的に増大してゆくが、 $\tau = 1000$ くらいで A, θ 共にいくつかの Fourier 成分の成長の変化が起きている。この変化は図を略した $1500 < \tau < 3000$ において A, θ の $1/3$ 成分の増加を一時止め、Aに対しては $\tau = 1500$ で少し現れている水平部の変動をひき起し(図4.4a, 前講究録 Fig. 6. aを参照) θ の Fourier 成分の振動を発生させる。その後、 $\tau > 3000$ ではb図のような成長する矩形解となる。 θ の Fourier 成分の変動は続いているが、大まかには図3.2のような空間変化となっている。図4.3は大きな攪乱からの変化であるが、極く初期を除けばほぼ同一のAの矩形解の増大を示している。しかし、 θ は図3.2とは異なり大きな chaotic な変動を示す。この理由はよくわからないが、

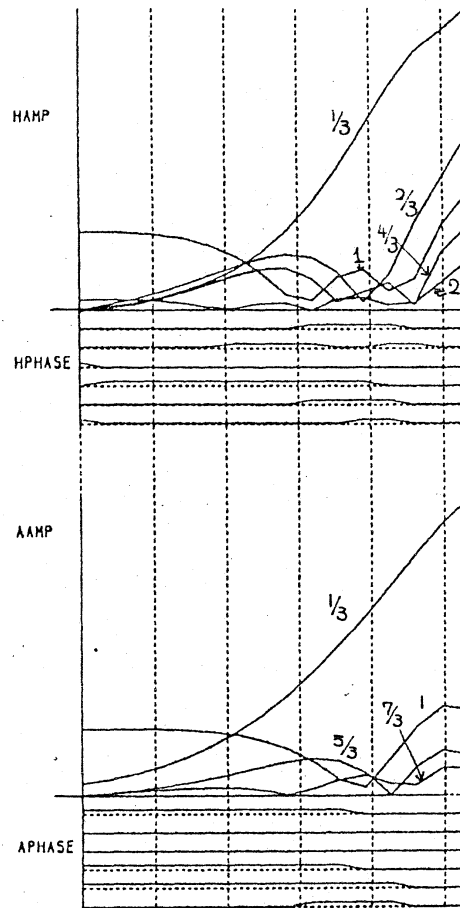
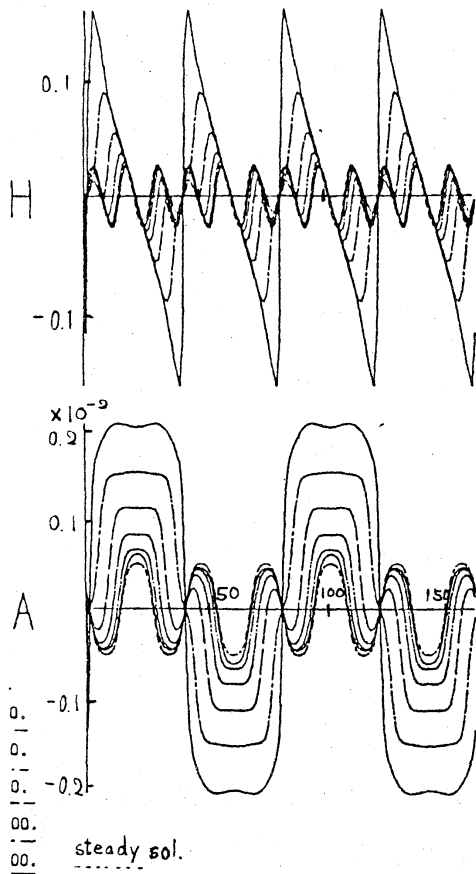


图 4.2a
 $e^2 = 0.9$

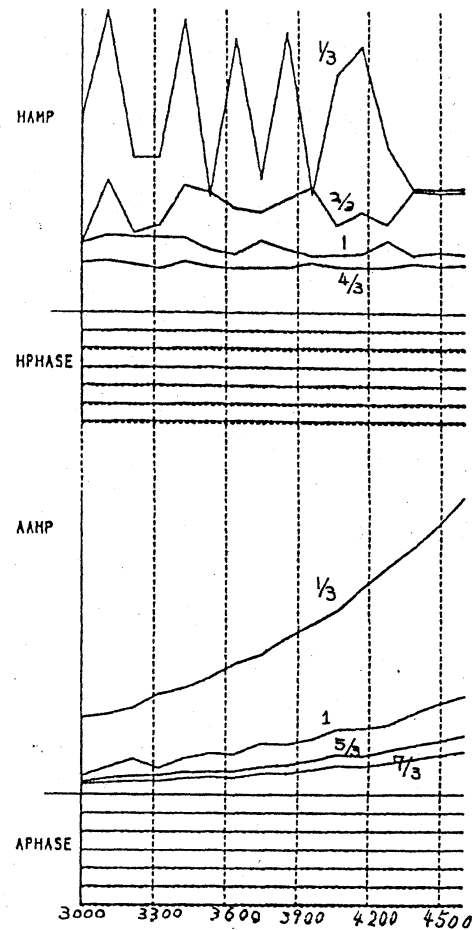
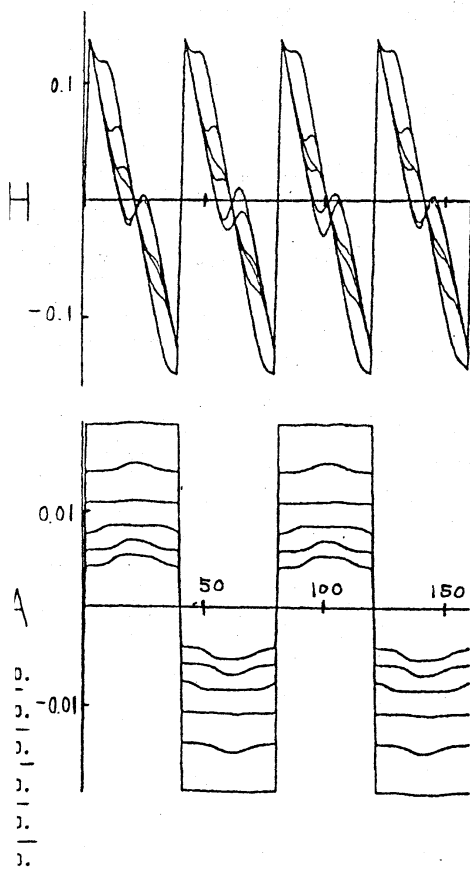


图 4.2b
 $e^2 = 0.9$

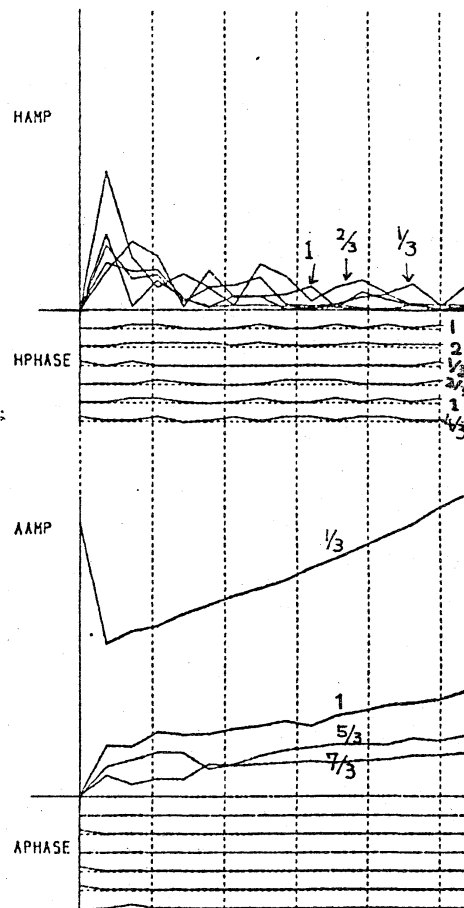
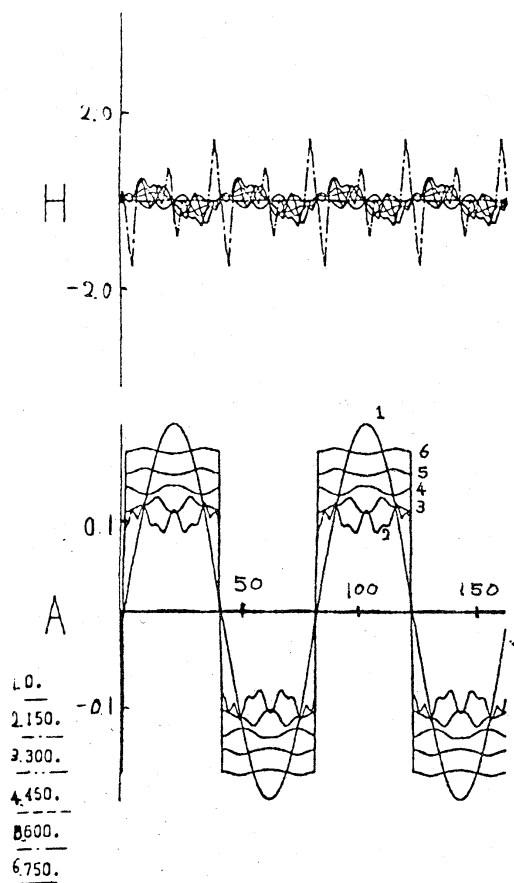


图 4.3 a

$$b^2 = 0.9$$

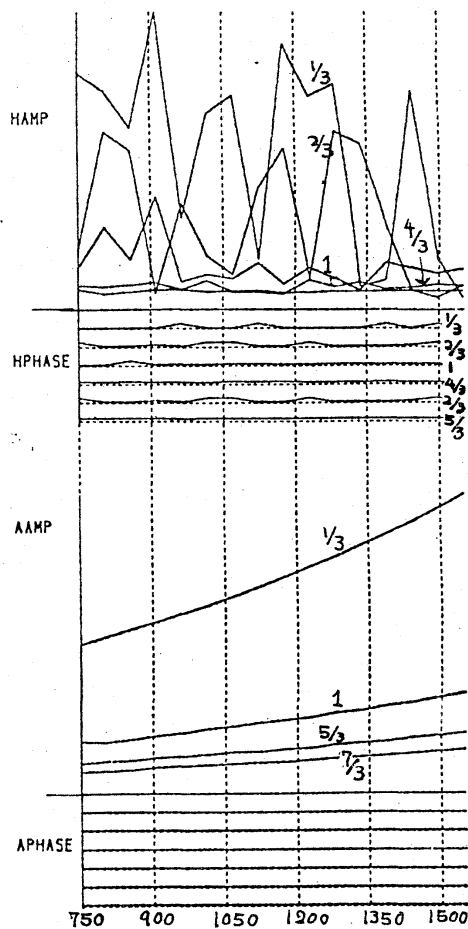
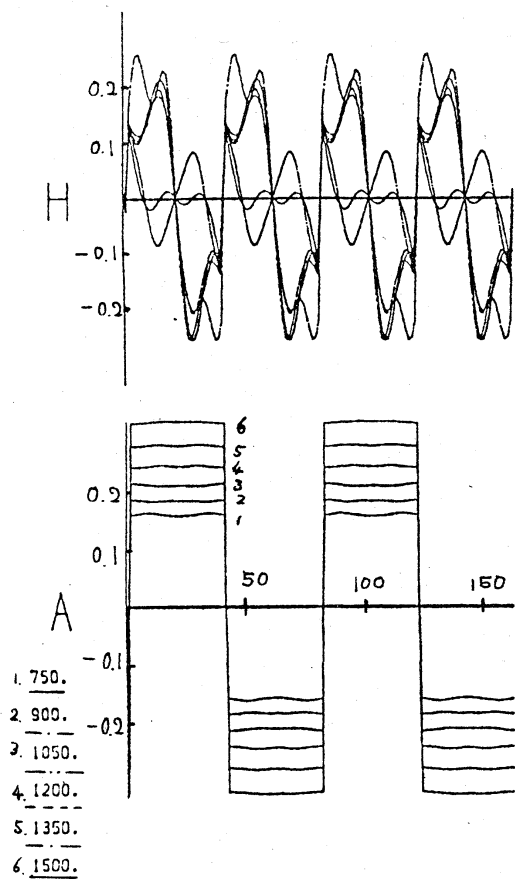


图 4.3 b

$$b^2 = 0.9$$

δ/ϵ の大きさが定常解に比べ大きいこと、 A の成長は β の大きさとほぼ等しいことが関係していると思われる。

$k^2 = 0.6$ の小擾乱の場合、図 4.4b のような β - α 弓形進行波解が得られる。初期の時間的变化(図 4.4a)は図 4.2a と同様な経過を示しているが、その後の A の水平部の変動、 ϵ の振動の中から進行波が出現している。進行波は $4000 < t < 10000$ の時間で観察され、数値誤差と思われる低波数成分により *break* した。進行波の速度 C は $C \sim 0.047$ であり、*shock* 付近での高さは $A_0 \sim 1.8 \times 10^{-3}$ と (3.6) より予想される $A_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma \epsilon^2}} |C| \sim 2.1 \times 10^{-3}$ によく一致している。また、 $h_{\max} \propto A_{\max}$, A_0 との関係(3.7)もほぼ成立しているのが確かめられる。図 4.4b で C は負であり、現実の系では下向きソルトフィッシャーが沈んでゆく解となっている。速度の大きさは δ に依存するが、最、最も速くなる $\delta \sim 1$ の場合海中の Brunt Väisälä frequency を用いた計算で数日で一浪長進む程度である。同様な振舞は $k^2 = 0.2$ の 20% の擾乱においても見い出され、 k^2 が小さい——小さな周期をもつ擾乱では進行波の現象が一般的であると期待される。

$k^2 = 0.6$ の 50 倍の擾乱に対しては図 4.5b の大きさのほとんど変化しない矩形解が得られる。初期の擾乱は他の Fourier 成分との相互作用により少し減少するが、以後増大も減少も

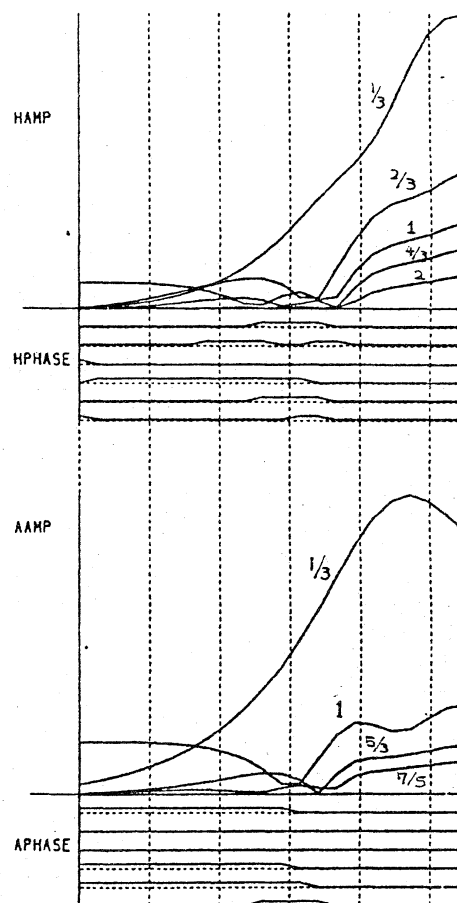
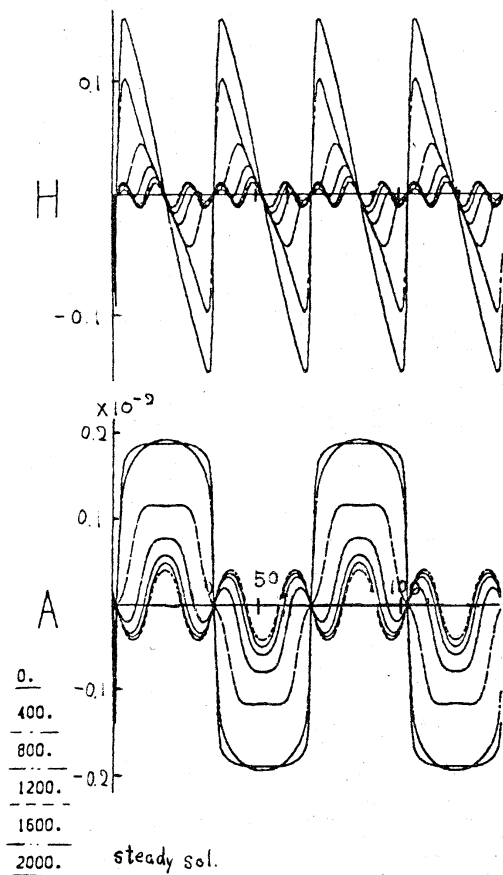


图 4.4a

$$e^2 = 0.6$$

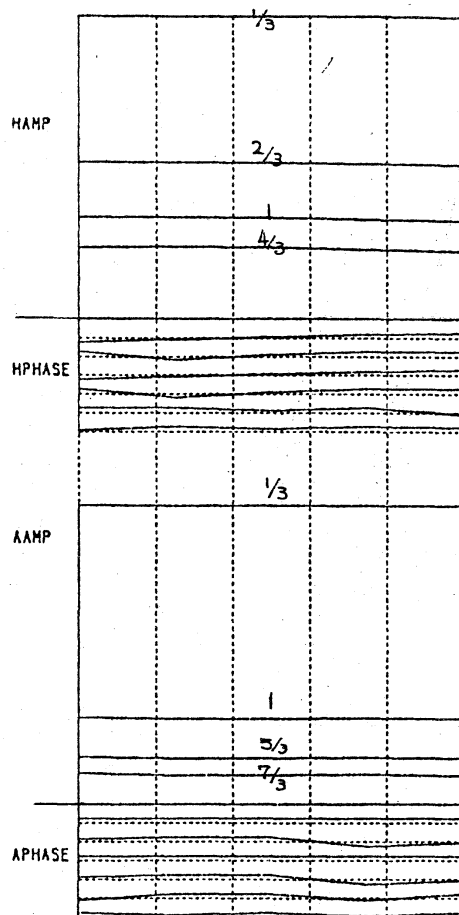
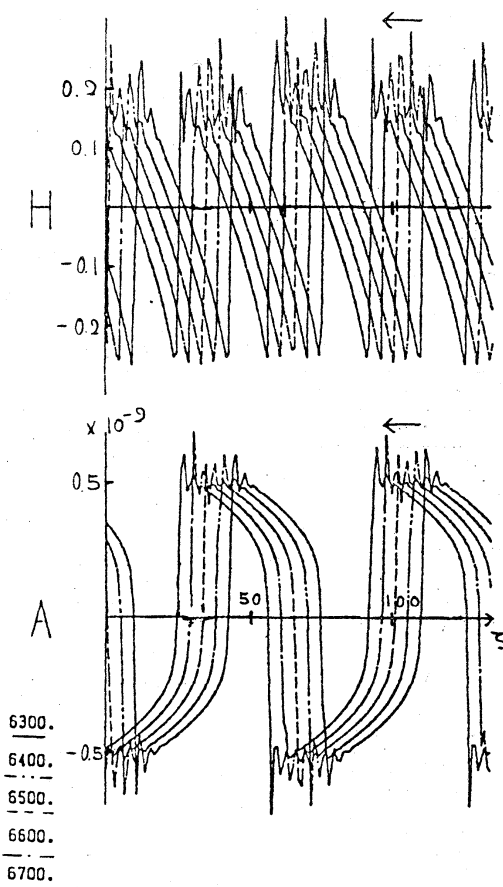


图 4.4b

$$e^2 = 0.6$$

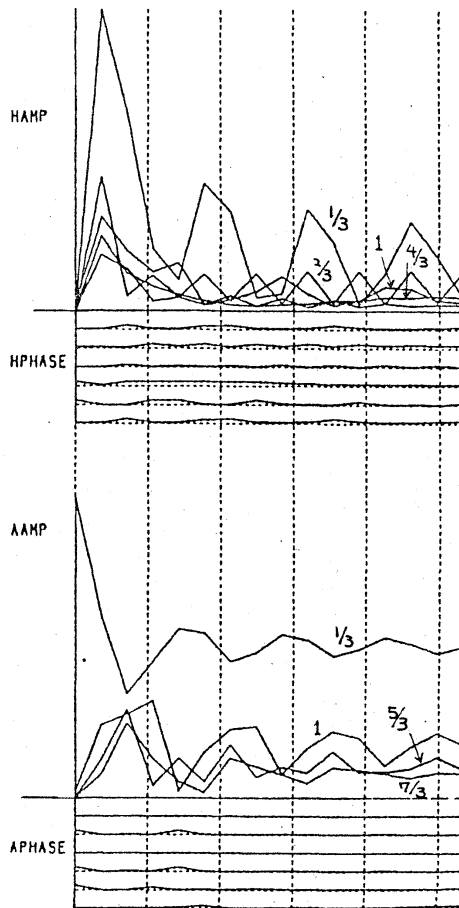
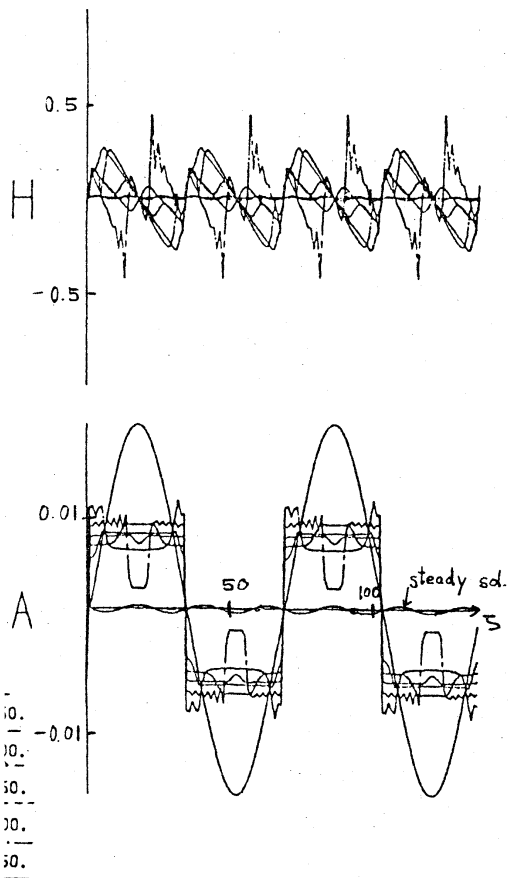


Fig 4.5a
 $k^2 = 0.6$

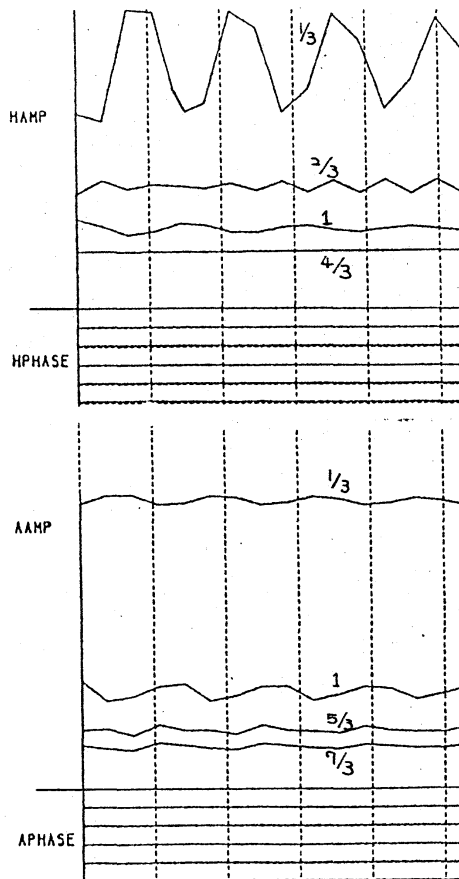
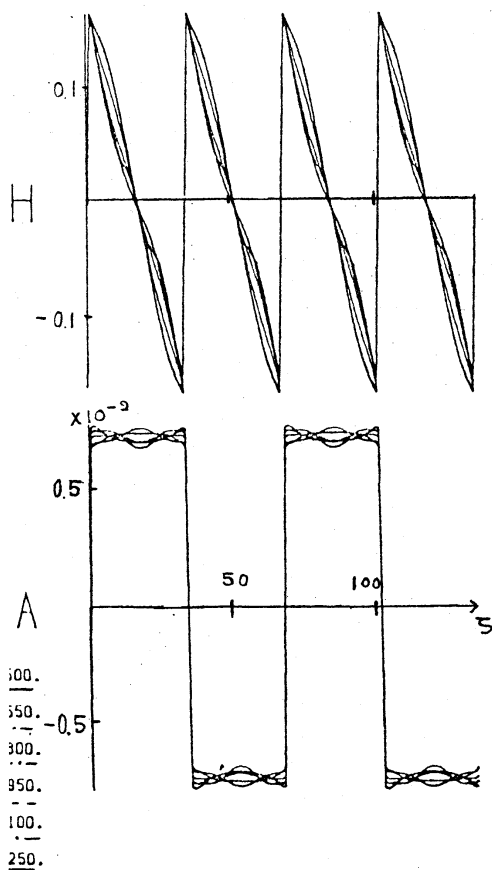


Fig 4.5b
 $k^2 = 0.6$

せず A 、 μ 両方が小さな振動を矩形解く§3. ④のまわりに繰り返す。振動は減衰的な傾向も示すが必ずしも明確ではない。 $k^2 = 0.2$ の場合は、図 4.5a のような A の複雑な形の矩形が変動しながら、くりと減少してゆくのが観察されるが最終状態はは、きりしなかった。

表 4.1 にこうした結果をまとめてある。 $1/3$ の擾乱の場合、大部分の case で時間的にほぼ相似な解（特に A について）となり、 $k^2 = 0.6$ 付近の境にしてその解の性質が変っているようにみえる。方程式 (2.11) は k^2 に依存していないので、 $k^2 = 0.6$ の定常解の3倍波長 ~ 70 くらいを境に空間的周期解の性質が異なっていると言えるだろう。いずれにしても、矩形解、波形進行解で A の変化の少ないなめらかな部分でソルトフィンガーが観察され、 A の急速に変化する境界領域の部分では乱れた流れの場をつくるに違いない。このソルトフィンガー間に乱れた領域を挟んだ形は Stern & Turner (1969) の実験結果と一致している。最後に、進行波解の速度 c は§3 の議論では決定できない。このため、ある状態からどんな大きな進行波解が出現するかという問いは今後の課題として残されている。

[参考文献]

楠本・石井 「二成分対流の層形成」, 数理研講究録「ナビエ・

ストーフの解」1981.12

Stern & Turner Deep-Sea Res. 16 (1969) 497

Tait & Howe Deep-Sea Res. 15 (1968) 275

山口昌哉編著 入門!現代の数学[1]非線型の現象と解析, 旺文館
1979